PETRE NĂCHILĂ

GEOMETRIE PENTRU TOŢI

CLASA a VII-a

Editura NOMINA

CUPRINS

Capitolul 1
PATRULATERE

1.1. Patrulaterul convex

DEFINIȚIA 1. Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

DEFINIȚIA 2. Un patrulater se numește **convex** dacă, pentru oricare două puncte din interiorul său, segmentul ce le unește este inclus în interiorul patrulaterului (sau oricare dreaptă suport a laturilor sale nu secționează interiorul patrulaterului). În caz contrar, patrulaterul se numește **convex**.

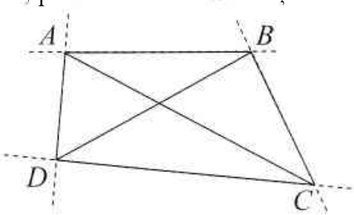

Fig. 1. Patrulater convex

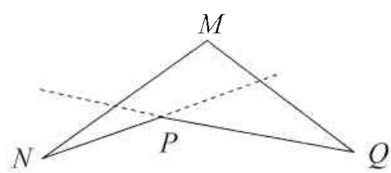

Fig. 2. Patrulater concav

TEOREMĂ. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.

DEFINIȚIA 3. Elementele unui patrulater convex sunt **vârfurile**, **laturile**, **unghiurile** și **diagonalele** ((AC) și (BD) în figura 1).
Vârfurile, laturile, unghiurile pot fi consecutive sau opuse.

DEFINIȚIA 4. Diagonala este segmentul determinat (în patrulater) de vârfurile a două unghiuri opuse.

Observații. 1. Un patrulater convex îl putem considera constituit din două triunghiuri care au interioarele disjuncte și o latură comună (o diagonală a patrulaterului).

2. Aria unui patrulater convex este suma ariilor a doua triunghiuri care îl compun.

Probleme rezolvate

1. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că sunt invers proporționale cu 2, 3, 4, 6.

Soluție. $\frac{A}{\frac{1}{2}} = \frac{B}{\frac{1}{3}} = \frac{C}{\frac{1}{4}} = \frac{D}{\frac{1}{6}} \Rightarrow \frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} = \frac{D}{2} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ \Rightarrow A = 144^\circ$, $B = 96^\circ$, $C = 72^\circ$, $D = 48^\circ$.

2. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, dacă primele trei sunt date de numere pare consecutive, iar a patra este media aritmetică a primelor trei.

Soluție. Notăm primele trei măsuri cu $2n-2$, $2n$, $2n+2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, iar a patra măsură este $2n$. Din $8n = 360$ rezultă $n = 45$. Măsurile sunt de $88°$, $90°$, $92°$, $90°$.

3. Fie patrulaterul $ABCD$, cu $AB = BC$, $CD = DA$. Demonstrați că:

a) $[BD$ este bisectoarea unghiului ABC;

b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C$;

c) $AC \perp BD$.

Soluție. a) $AB = BC$, $AD = CD \Rightarrow \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle DAC$ (figura 3) $\Rightarrow BD$ mediatoarea lui $[AC] \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle ABD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA +$ $+ \sphericalangle DCA = \sphericalangle C$, $AC \perp BD$.

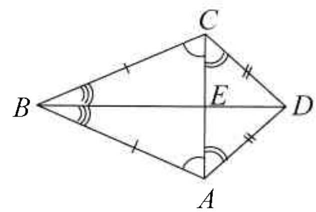

Fig. 3

Probleme propuse

*

1. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Măsurile unghiurilor triunghiului ABD, în ordinea A, B, D, sunt direct proporționale cu numerele 6, 4, 2, iar măsurile unghiurilor triunghiului BCD sunt invers proporționale, în ordinea B, C, D, cu $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.

2. Câte patrulatere convexe se pot forma cu cinci puncte distincte?

3. Care este numărul minim (maxim) de:

a) unghiuri ascuțite ale unui patrulater convex;

b) unghiuri obtuze ale unui patrulater convex.

4. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu:

a) 2, 4, 6, 8; b) 3, 5, 6, 4.

5. Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt invers proporționale cu:

a) 3, 4, 6, 12; b) 2, 4, 6, 8.

6. Suma măsurilor a trei unghiuri ale unui patrulater convex este 240°. Determinați măsurile unghiurilor dacă trei dintre acestea sunt congruente.

7. Suma măsurilor a două unghiuri ale unui patrulater convex este 168°, iar trei unghiuri sunt congruente. Aflați măsurile unghiurilor.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $AB \cap CD = \{O\}$.

a) Completați tabelul:

	$\sphericalangle BAD$	$\sphericalangle ABC$	$\sphericalangle BCD$	$\sphericalangle CDA$	$\sphericalangle DAC$	$\sphericalangle BAC$	$\sphericalangle BCA$	$\sphericalangle ACD$	$\sphericalangle BDC$	$\sphericalangle BDA$	$\sphericalangle AOB$
i)	120°		95°		75°		50°		20°	40°	
ii)		105°	75°			60°		30°			90°
iii)						90°	30°	30°	30°		120°

b) În cazul i), demonstrați că există în figură două triunghiuri isoscele.

c) În cazul ii), demonstrați că: I. $OA = OB$; II. $OC = OD$; III. $AD = 2 \cdot AO$; IV. $BC = 2 \cdot BO$; V. $AB \parallel CD$; VI. $AC = BD$.

d) În cazul iii), demonstrați că: I. $OA = OB$; II. $OC = OD$; III. $AC = BD$; IV. $AC = 3 \cdot OA$; V. $AB \parallel CD$; VI. $AD = BC$.

**

9. Demonstrați că, în orice patrulater convex, suma lungimilor a trei laturi este mai mare decât lungimea celei de-a patra laturi.

10. Într-un patrulater convex $ABCD$ avem $AC \cap BD = \{O\}$, $OA = OB$, $OC = OD$. Demonstrați că:

a) $AB \parallel CD$; b) $AD = BC$.

11. Într-un patrulater convex $ABCD$ avem $OA = OC$, $OB = OD$, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrați că:

a) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$; b) $AB = CD$, $AD = BC$.

12. Puteți împărți un patrulater oarecare în trei „regiuni” folosind o singură dreaptă?

13. Determinați măsura unui unghi al unui patrulater convex, dacă măsurile unghiurilor sunt direct proporționale cu numerele $2n - 4$, $2n - 2$, $2n$, $2n + 6$, unde $n > 2$.

***

14. În patrulaterul $ABCD$ se știe că $m(\sphericalangle A) = 50°$, $m(\sphericalangle B) = 40°$, $m(\sphericalangle C) = 30°$. Determinați $m(\sphericalangle ADC)$ și unghiul făcut de dreptele AB și DC.

15. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu perimetrul de 39 cm. Se știe că $P_{ABC} = 23$ cm, $P_{ACD} = 34$ cm. Determinați lungimea diagonalei AC.

16. Fie patrulaterul convex $ABCD$. Știind că $P_{ABD} = P_{ACD}$ și $P_{BCD} = P_{ABC}$, demonstrați că $AC = BD$, $AB = DC$, $AD = BC$.

17. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $AB = BC$, $AD = CD$, $m(\sphericalangle ABD) = 30°$, $m(\sphericalangle DAC) = 45°$.

a) Determinați măsurile unghiurilor patrulaterului.

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Determinați m($\sphericalangle AOB$).

c) Demonstrați că $OD = OA = OC = \frac{1}{2}AB$.

18. Fie $ABCD$ patrulater convex, iar M și N mijloacele diagonalelor (AC) și (BD). Demonstrați că $AB + BC + CD + DA > 4MN$.

19. Fie $ABCD$ patrulater convex. Demonstrați că:

$$2\ (AC^2 + BD^2) < (AC + BD)(AB + BC + CD + DA).$$

20. Demonstrați că suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este $S_n = 180° \cdot (n - 2)$ (unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

21. Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui poligon convex formate prin prelungirea laturilor în același sens este de 360°.

22. Demonstrați că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri consecutive formează între ele un unghi având măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte două unghiuri.

23. Demonstrați că într-un patrulater convex, bisectoarele a două unghiuri opuse formează între ele un unghi suplementar cu semidiferența celorlalte două unghiuri.

24. Fie M un punct interior patrulaterului convex $ABCD$. Demonstrați că:

$$AM + MD < AB + BC + CD.$$

25. Fie M un punct interior patrulaterului convex $ABCD$. Demonstrați că:

$$AB + BC + CD + DA < 2(AM + MB + MC + MD) < 3(AB + BC + CD + DA).$$

26. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$. Bisectoarea unghiului B intersectează DC și AD în E și F. Demonstrați că m($\sphericalangle DEF$) $= 180° - A - \frac{B}{2}$.

27. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $(AD \cap (BC = \{M\}$, iar $(AB \cap (DC = \{N\}$. Demonstrați că m($\sphericalangle BMA$) – m($\sphericalangle AND$) = m($\sphericalangle ADC$) – m($\sphericalangle ABC$). (Figura $MCDNAB$ se numește **patrulater complet**.)

28. Demonstrați că, dacă unul din unghiurile unui patrulater convex are măsura egală cu media aritmetică a măsurilor celorlalte trei unghiuri, atunci acest unghi este drept.

29. Demonstrați că, dacă un unghi al unui poligon convex cu n laturi are măsura egală cu $\frac{1}{2n-5}$ din suma măsurilor celorlalte unghiuri, atunci acest unghi este drept.

30. Demonstrați că în patrulaterul convex $ABCD$ avem:

a) $AC + BD > AB + CD$;   b) $2 \cdot (AC + BD) > AB + BC + CD + DA$.

31. Demonstrați că într-un patrulater convex $ABCD$ cu M și N mijloacele laturilor (AB) și (CD) avem $2MN < AD + BC$.

32. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $A > 90°$, $C > 90°$. Arătați că $AC < BD$.

33. Dacă în patrulaterul convex $ABCD$ avem $AB + BD < AC + CD$, atunci $AB < AC$.

34. În patrulaterul convex $ABCD$ avem $AC = AD$. Demonstrați că $BC < BD$.

35. Fie $2p$ perimetrul patrulaterului convex $ABCD$. Demonstrați că $p < AC + BD < 2p$.

36. Demonstrați că în orice poligon convex nu putem avea mai mult de trei unghiuri ascuțite.

1.2. Paralelogramul

DEFINIȚIE. Paralelogramul este patrulaterul convex cu laturile opuse paralele două câte două.

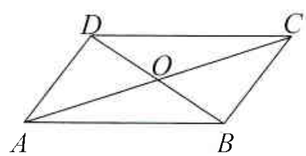

Fig. 4

TEOREMA 1. Într-un paralelogram sunt adevărate afirmațiile:

1) laturile opuse sunt congruente două câte două;
2) oricare două unghiuri opuse sunt congruente;
3) oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
4) diagonalele se taie în segmente congruente (se „înjumătățesc”).

TEOREMA 2. Un patrulater convex $ABCD$ este paralelogram dacă îndeplinește una dintre condițiile:

(1) $AB = CD$; $AD = BC$ (laturile opuse sunt congruente);
(2) $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle D$ (oricare două unghiuri opuse sunt congruente);
(3) oricare două unghiuri alăturate sunt suplementare;
(4) diagonalele se înjumătățesc;
(5) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ (definiție);
(6) are două laturi opuse paralele și congruente.

Observații. *1.* Înălțimea unui paralelogram este distanța dintre două laturi opuse (în figura 5, (MN) și (EF)).

2. Punctul O de intersecție a diagonalelor unui paralelogram este centrul său de greutate.

3. Perimetrul este $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.

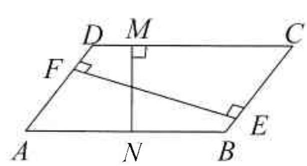

Fig. 5

Probleme rezolvate

1. Demonstrați că orice dreaptă dusă prin punctul de intersecție a diagonalelor este împărțită de acest punct și de două laturi opuse în „părți” egale.

Soluție. Luând figura 6, trebuie demonstrat că $AN = CP$ ($\Leftrightarrow BN = DP$), $OP = ON$. Avem $\Delta AON \equiv \Delta COP$ ($AO = CO$, $\sphericalangle AON \equiv \sphericalangle COP$, $\sphericalangle NAO \equiv \sphericalangle PCO$) și deci $OP = ON$, $AN = PC$.

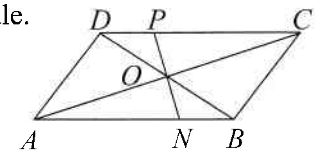

Fig. 6

2. Fie paralelogramul $MNPR$ înscris în paralelogramul $ABCD$ (vârfurile unuia se află câte unul pe o latură a celuilalt, figura 7). Demonstrați că cele două paralelograme au același centru de greutate.

Soluție. Fie O mijlocul diagonalelor (MP) și (NR). Avem $\Delta AMR \equiv \Delta CPN$ ($MR = PN$, $\sphericalangle AMR \equiv \sphericalangle CPN$, $\sphericalangle ARM \equiv \sphericalangle CNP$, având laturile paralele). Avem deci $AM = CP$. Avem $\Delta AOM \equiv \Delta COP$ ($AM = CP$, $OM = OP$, $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle CPO$) și deci $OA = OC$. Analog se arată că $OB = OD$ și deci $ABCD$ este paralelogram.

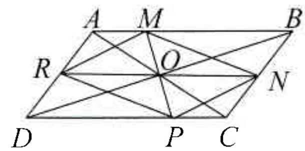

Fig. 7

3. Fie N și P mijloacele laturilor (AB) și (CD) ale paralelogramului $ABCD$. Fie $BD \cap AP = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$. Demonstrați că $DE = EF = BF$.

Soluție. Fie $AC \cap BD = \{O\}$ (figura 8). Cum (AP) și (DO) sunt mediane (ce se taie în E) ale triunghiului DAC, atunci E este centrul de greutate și deci $DE = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{BD}{3}$. Analog avem $BF = \frac{BD}{3}$ și obținem $EF = \frac{BD}{3}$.

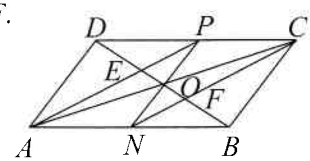

Fig. 8

Probleme propuse

*

1. Determinați măsurile unghiurilor paralelogramului $ABCD$ dacă:

a) $A = 2B$; b) $C + 2D = 315°$; c) $\frac{2}{3}B - A = 60°$.

2. Fie $ABCD$ paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă:

a) $AD = 12$ cm, $AC = 16$ cm, $P_{BOC} = 26$ cm, aflați BD;

b) $P_{ABO} = P_{ADO} = 24$ cm, $OA + OB = 14$ cm, aflați P_{ABCD}.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) există paralelograme cu toate unghiurile drepte;

b) există paralelograme cu toate laturile congruente;

c) există paralelograme cu diagonalele perpendiculare;
d) există paralelograme cu diagonalele congruente.

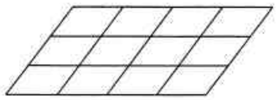

Fig. 9

4. Câte paralelograme sunt în figura 9?

5. Calculați perimetrul paralelogramului $ABCD$, știind că $AD = 5$ cm, $BD \perp AD$, $m(\sphericalangle BCD) = 60°$.

6. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $CDFE$ având centrele N, respectiv P. Calculați lungimea segmentului (AF), dacă $NP = 5$ cm.

7. Fie triunghiul ABC echilateral și punctul $E \in (AC)$, iar triunghiul ADE echilateral în exteriorul lui ABC. Fie $DE \cap BC = \{F\}$. Demonstrați că patrulaterul $ABFD$ este paralelogram.

8. Fie punctele $E \in (AB)$, $F \in (CD)$, astfel încât $AE = CF$, $AF \cap DE = \{M\}$, $CE \cap BF = \{N\}$. Știind că $ABCD$ este paralelogram, demonstrați că patrulaterele $AECF$, $MENF$, $DFBE$ sunt paralelograme.

9. Fie triunghiul ABC isoscel $(AB = AC)$ și $D = \text{sim}_C A$, $E = \text{sim}_{BC} A$. Demonstrați că $BCDE$ este paralelogram.

10. Fie paralelogramele $ABCD$ şi $ABFE$. Demonstrați că $CDEF$ este paralelogram.

11. Fie paralelogramul $ABCD$, cu $AB = 2BC$, $m(\sphericalangle A) = 2m(\sphericalangle D)$. Calculați $m(\sphericalangle ACD)$.

**

12. Fie paralelogramul $ABCD$ și punctele $M \in (AB)$, $P \in (CD)$, $N \in [BC]$ și $R \in [AD]$, astfel încât $AM = CP$, $BN = DR$. Demonstrați că dreptele AC, MP şi NR sunt concurente.

13. Fie paralelogramul $ABCD$ şi $BM \perp AC$, $DN \perp AC$, $M, N \in (AC)$. Demonstrați că mijlocul lui MN se află pe (BD).

14. Bisectoarele unghiurilor A și C ale paralelogramului $ABCD$ intersectează BD în E și F. Demonstrați că $AECF$ este paralelogram.

15. Fie M mijlocul laturii BC în paralelogramul $ABCD$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AM \cap CD = \{E\}$. Demonstrați că $DE = 4 \cdot OM$.

16. Demonstrați că patrulaterul convex în care două laturi sunt paralele, iar una dintre diagonale trece prin mijlocul celelalte este paralelogram.

17. Paralelogramele $ABCD$, $CDEF$, $BCFG$ au interioarele disjuncte. Demonstrați că $\Delta AEG \equiv \Delta FBD$.

18. Fie paralelogramul $ABCD$ și $DE \perp AB$, $DF \perp BC$, $BG \perp CD$, $BH \perp DA$, $E \in (AB)$, $F \in (BC)$, $G \in (CD)$, $H \in (AD)$, $BG \cap DF = \{N\}$, $DE \cap BH = \{P\}$. Demonstrați că:

a) patrulaterul $EFGH$ este paralelogram;

b) dreptele EG, FH, NP și AC sunt concurente.

19. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale BCE și CDF. Demonstrați că triunghiul AEF este echilateral.

20. În exteriorul paralelogramului $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP și ADR. Demonstrați că $MNPR$ este paralelogram.

***

21. Fie M mijlocul ipotenuzei (BC) în triunghiul ABC, $D \in (BC)$, N mijlocul lui (AD), iar $E = \text{sim}_D M$. Dreapta DE taie AC și AB în punctele P și R. Demonstrați că $PE = RE$.

22. Fie I mijlocul înălțimii (AF) în triunghiul ABC. Dreptele BI și CI întâlnesc AC și AB în M, respectiv N. Paralelele duse prin F la laturile AC și AB taie BM și CN în P și R. Demonstrați că $MNPR$ este paralelogram.

23. Fie $ABCD$ paralelogram. Prin $E \in (AD)$ se duce $EF \parallel AB$, $F \in (BC)$, iar $AF \cap BD = \{G\}$. Prelungim GF cu $FH = AG$ și GD cu $DI = BG$. Se construiește paralelogramul $IGHK$. Demonstrați că $GK \parallel BC$ și $GK = AE + BC$.

24. Fie punctul F pe înălțimea (AD) a triunghiului dreptunghic ABC. Perpendiculara în F pe FC taie latura AB în E, iar paralela prin A la FE taie BC în H. Demonstrați că $AEFH$ este paralelogram.

25. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $H \in AD$. Fie $HP \perp HC$, $P \in AB$, $AM \parallel PH$, $M \in BC$. Demonstrați că:

a) $MH \perp AC$; b) $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle ACH$; c) $AMHP$ este paralelogram.

26. Fie $ABCD$ paralelogram, $AC > BD$, $BN \perp AC$, $N \in AC$, $m(\sphericalangle ACD) = 50°$, $m(\sphericalangle ABN) = 40°$, iar raportorul unghiurilor ascuțite ale lui BNC este egal cu $\frac{1}{2}$. Fie $BN \cap AD = \{P\}$, iar $[BM$ bisectoarea lui $\sphericalangle BPD$, $M \in BC$.

a) Determinați măsurile unghiurilor paralelogramului.

b) Demonstrați că triunghiul BMP este echilateral.

27. Fie $D \in (BC)$ în triunghiul ABC. Paralelele prin D la AB și AC intersectează paralelă prin A la BC în E și F. Demonstrați că AD, BE, CF sunt concurente.

28. Fie paralelogramul $ABCD$, E, $F \in (BD)$, astfel încât $BE = EF = FD$, $BC \cap AE = \{N\}$, $CD \cap AF = \{P\}$, $AB \cap CE = \{R\}$, $AD \cap CF = \{M\}$. Demonstrați că dreptele AC, EF, MN, PR sunt concurente.